ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA 65. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2015/2016)

Kategorie A

1. V každé ze čtyř místností je několik předmětů. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Jednu n-tinu předmětů z první místnosti přeneseme do místnosti druhé. Následně jednu n-tinu (z nového počtu) předmětů přeneseme z druhé místnosti do třetí. Podobně pak ze třetí místnosti do čtvrté a ze čtvrté do první. (Vždy přitom přenášíme celé předměty.) Víte-li, že na konci byl v každé místnosti stejný počet předmětů, určete, kolik nejméně předmětů mohlo být na začátku ve druhé místnosti. Pro která n se tak může stát? (*Vojtech Bálint, Michal Rolínek*)

2. Nalezněte nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pro každé $x \in \langle 0, 2 \rangle$. (*Leo Boček*)

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a delší odvěsnou BC. Nechť D je pata výšky z vrcholu C. Kružnice k se středem D a poloměrem CD protíná odvěsnu BC v bodě Q a dále přímku AB v bodech E a F ($E \neq F$), kde F je bodem přepony AB. Úsečka QE protíná odvěsnu AC v bodě P. Dokažte, že $|PE| = |QF|$. (*Jaroslav Švrček*)

4. Nela s Janou zvolí přirozené číslo k a následně hrají hru s tabulkou o rozměrech 9×9. Začínající Nela pokaždé svým tahem vybere jedno prázdné políčko a vepíše do něj nulu. Zato Jana ve svém tahu do nějakého prázdného políčka napíše jedničku. Navíc po každém tahu Nely následuje k tahů Jany. Pokud se kdykoli během hry stane, že součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je lichý, vítězí Jana. Pokud dívky vyplní celou tabulku, aniž by se tak stalo, vítězí Nela. Nalezněte nejmenší hodnotu k, pro niž má Jana vítěznou strategii. (*Michal Rolínek*)

5. Je dán trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC a na polopřímkách opačných k polopřímkám BC, CB zvolme postupně body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Přímky KX a LY se protínají v bodě M. Dokažte, že těžiště trojúhelníku KLM splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC. (*Tomáš Jurík*)

6. Na tabuli je napsán součin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pro která přirozená čísla $n \geqq 2$ je možno za některé z činitelů dopsat vykřičník, a nahradit je tak jejich faktoriály, aby výsledný součin byl roven druhé mocnině přirozeného čísla? (*Michal Rolínek*)

65. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie B

1. Pro přirozená čísla k, l, m platí

$$\frac{k+m+klm}{lm+1}=\frac{2\,051}{404}.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu klm. (*Aleš Kobza*)

2. Do čtvercové tabulky 11×11 jsme vepsali přirozená čísla $1, 2, \ldots, 121$ postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou 4×4 jsme všemi možnými způsoby zakryli právě 16 políček. Kolikrát byl součet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla? (*Vojtech Bálint, Tomáš Jurík*)

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC|=4\,\mathrm{cm}$ a $|BC|=3\,\mathrm{cm}$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC, zatímco k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu poloměru r_2. (*Pavel Novotný*)

4. Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi. (*Erika Novotná*)

5. Vrcholy konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ leží na kružnici, přičemž $|AB|=|CD|$. Úsečky AE a CF se protínají v bodě G a úsečky BE a DF se protínají v bodě H. Dokažte, že úsečky GH, AD a BC jsou navzájem rovnoběžné. (*Šárka Gergelitsová*)

6. Kladná reálná čísla a, b, c jsou taková, že hodnoty

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_3=c,\quad x_4=\frac{2a^2}{b+c},\quad x_5=\frac{2b^2}{c+a},\quad x_6=\frac{2c^2}{a+b}$$

jsou navzájem různé. Zapišme je od nejmenší po největší:

$$x_{i_1}<x_{i_2}<x_{i_3}<x_{i_4}<x_{i_5}<x_{i_6}.$$

Zjistěte, kolik různých pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ indexů 1 až 6 můžeme dostat, když budeme různě volit čísla a, b, c. (*Jaromír Šimša*)

65. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie C

1. Najděte všechny možné hodnoty součinu prvočísel p, q, r, pro která platí

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

2. Určete, kolika způsoby lze k jednotlivým vrcholům krychle $ABCDEFGH$ připsat čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby součin čísel připsaných libovolným třem vrcholům každé ze stěn krychle byl sudý. (*Jaroslav Švrček*)

3. Uvažujme výraz

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž daný výraz nabývá své nejmenší hodnoty.
b) Určete všechny dvojice celých nezáporných čísel x a y, pro které je hodnota daného výrazu rovna číslu 16. (*Aleš Kobza*)

4. Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.
b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4. (*Vojtěch Žádník*)

5. Máme kartičky s čísly $5, 6, 7, \ldots, 55$ (na každé kartičce je jedno číslo). Kolik nejvýše kartiček můžeme vybrat tak, aby součet čísel na žádných dvou vybraných kartičkách nebyl palindrom? (Palindrom je číslo, které je stejné při čtení zleva doprava i zprava doleva.) (*Tomáš Jurík*)

6. Je dána kružnice $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, její bod B a kružnice $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je středem úsečky AB a bod K je středem úsečky AC. Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku KLM, jehož vrchol L je jeden z průsečíků kružnic k_1, k_2 a jehož přepona KM leží na přímce AB. (*Šárka Gergelitsová*)